$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \prec +\infty \qquad (58)$$

болса , онда $l \to +\infty$ жағдайында (58) негізінде (57) формуланың бірінші қосылғышы нөлге ұмтылады, демек,

$$f(x) = \lim_{l \to +\infty} \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(\xi) \cos \frac{k\pi}{l} (\xi - x) d\xi \qquad (59)$$

Егер $\frac{k\pi}{l} = \lambda_k$, $\frac{\pi}{l} = \Delta\lambda_k$ десек, онда (59) былай

$$f(x) = \lim_{l \to +\infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\lambda_k \int_{-l}^{l} f(\xi) \cos \lambda_k (\xi - x) d\xi \qquad (60)$$

жазылар еді. Мұндағы l шексіздікке ұмтылғанда $\int_{-l}^{l} f(\xi) \cos \lambda_k (\xi - x) d\xi$ интегралын $\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda_k (\xi - x) d\xi$ интегралымен ауыстырып, ал $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta\lambda_k \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda_k (\xi - x) d\xi$ қосындысы $\int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda (\xi - x) d\xi$ интегралы үшін интегралдық қосынды екенін ескерсек, (60) теңдіктен

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda (\xi - x) d\xi \qquad (61)$$

аламыз. Мұнда да, егер x нүктесі $f(x)$ функциясының үзіліс нүктесі болса, онда сол жағындағы $f(x)$ орнына $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ деп жазамыз. Мұның оң жағындағы интегралды Фурье интегралы деп атайды , ал (61) формуланың өзін Фурье интегралдық формуласы деп атайды.

Фурье интегралдық формуласын негіздеу

1-Теорема. Егер $f(x)$ функциясы x өсінің әрбір ақырлы кесіндісінде құрама-жатық, ал бүкіл x өсінде абсолютті интегралданса, онда

$$\lim_{l \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{l} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda (\xi - x) d\xi = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \qquad (62)$$

Дәлелдеу. Ең алдымен λ параметрінен тәуелді $\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda (\xi - x) d\xi$ интегралының бірқалыпты жинақты екенін байқаймыз, өйткені $0<\lambda<+\infty$ параметр мәндерінде $|f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)| \le |f(\xi)|$, ал $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi \prec \infty$. Демек, интегралдар орындарын ауыстыруға болады:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^l d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\int_0^l f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)d\lambda=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\frac{\sin l(\xi-x)}{\xi-x}d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\xi)\frac{\sin l\xi}{\xi}d\xi \qquad (63)$$

Енді

$$\lim_{l\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x+\xi)\frac{\sin l\xi}{\xi}d\xi=\frac{f(x-0)}{2} \qquad \lim_{l\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x+\xi)\frac{\sin l\xi}{\xi}d\xi=\frac{f(x+0)}{2} \qquad (64)$$

екенін дәлелдейік. Ол үшін

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin l\xi}{\xi}d\xi=\frac{1}{2} \qquad (65)$$

Дирихле интегралы көмегімен

$$\frac{f(x+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x+0)\frac{\sin l\xi}{\xi}d\xi \qquad (66)$$

деп жазсақ, онда

$$J_{0,+\infty}=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x+\xi)\frac{\sin l\xi}{\xi}d\xi-\frac{f(x+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}[f(x+\xi)-f(x+0)]\frac{\sin l\xi}{\xi}d\xi \qquad (67)$$

Сонымен бізге $l\to+\infty$ ұмтылғанда осы интегралдың нөлге ұмтылатынын көрсету керек. Ол үшін $0\le\xi<+\infty$ интегралын $0\le\xi\le\delta_1$, $\delta_1\le\xi\le\delta_2$, $\delta_2\le\xi<+\infty$ үш интервалға бөлеміз, сонда (67) интеграл мынадай үш интеграл қосындысы түрінде өрнектеледі:

$$J_{0,+\infty}=J_{0,\delta_1}+J_{\delta_1,\delta_2}+J_{\delta_2,+\infty} \qquad (68)$$

Бірінші

$$J_{0,\delta_1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta_1}\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}\sin l\xi d\xi$$

интегралын бағалайық.. Жеткілікті аз $\delta_1>0$ мәндерінде барлық $\xi\in(0,\delta_1)$ үшін

$$\left|\frac{f(x+\xi)-f(x+0)}{\xi}\right|\prec\left|f_+'(x)\right|+1$$

теңсіздігі орындалады, демек, барлық $\delta<\dfrac{\varepsilon\pi}{3\left\{\left|f_+'(x)\right|+1\right\}}$ және барлық l үшін

$$\left|J_0,\delta_1\right| \prec \frac{\delta}{\pi}\left(\left|f_+'(x)\right|+1\right) \prec \frac{\varepsilon}{3} \qquad (69)$$

Енді үшінші $J_{\delta_2,+\infty}$ интегралын бағалайық:

$$\left|J_{\delta_2,+\infty}\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{\delta_2}^{+\infty} f(x+\zeta)\frac{\sin l\zeta}{\zeta}d\zeta - \frac{f(x+0)}{\pi}\int_{\delta_2}^{+\infty}\frac{\sin l\zeta}{\zeta}d\zeta\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_{\delta_2}^{+\infty}\left|f(x+\zeta)\right|\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\left|f(x+0)\right|}{\pi}\left|\int_{\delta_2}^{+\infty}\frac{\sin l\zeta}{\zeta}d\zeta\right| \le \qquad (70)$$

$$\le \frac{1}{\pi\delta_2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x+\zeta)\right|d\zeta + \frac{\left|f(x+0)\right|}{\pi}\left|\int_{l\delta_2}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\right| = \frac{Q}{\pi\delta_2} + \frac{\left|f(x+0)\right|}{\pi}\left|\int_{l\delta_2}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\right|$$

Мұнан $Q = \int_{-\infty}^{\infty}\left|f(\xi)\right|d\xi \prec +\infty$ болғандықтан, жеткілікті үлкен δ_2 үшін барлық l мәнінде $\frac{Q}{\pi\delta_2} \prec \frac{\varepsilon}{6}$. Ал $\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$ болғандықтан, жеткілікті үлкен δ_2 мен барлық $l \ge 1$ үшін

$$\frac{\left|f(x+0)\right|}{\pi}\left|\int_{l\delta_2}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\right| \prec \frac{\varepsilon}{6}.$$

Сонда кез келген үлкен δ_2 мен кез келген $l \ge 1$ үшін (70) теңсіздіктен

$$\left|J_{\delta_2,+\infty}\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (71)$$

Енді бізге

$$J_{\delta_1,\delta_2} = \frac{1}{\pi}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{f(x+\zeta)-f(x+0)}{\zeta}\sin l\zeta d\zeta \qquad (72)$$

интегралын бағалау қалды. Интеграл астындағы функция $\frac{f(x+\zeta)-f(x+0)}{\zeta}$ айнымалы ζ арқылы $\delta_1 \le \zeta \le \delta_2$ аралығында құрама жатық болғандықтан жеткілікті үлкен l мәндерінде

$$\left|J_{\delta_1,\delta_2}\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (73)$$

құрама – жатық $g(x)$ – функциясы үшін Бессель теңсіздігі

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \le \int_{-l}^{l} g^2(x)dx$$

орындалады да, ал қатар жинақтылығымен $k \to +\infty$ ұмтылғанда $a_k, b_k \to 0$ шығады, яғни

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \frac{1}{l}\lim_{k\to\infty}\int_{-l}^{l} g(\zeta)\sin k\zeta = 0.$$

Сонымен, (69), (71), (73) теңсіздіктерінен, жеткілікті үлкен $l \geq 1$ үшін

$$\left|J_{0,+\infty}\right| < \varepsilon$$

аламыз. Теорема дәлелденді.

Бұл Фурье интегралы туралы теорема $f(x)$ – функциясына қойылатын талаптың жеңілдеу жағдайында да орындалады.

2-теорема. Егер бүкіл шексіз түзуде абсолютті интегралданатын $f(x)$ функциясы бұл түзудің әрбір ақырлы кесіндісінде құрама – үзіліссіз және кез келген x мәнінде жеткілікті аз барлық ζ үшін $\left|\frac{f(x-\zeta)-f(x+0)}{\zeta}\right|$ шектеулі болса, онда (62) формула орынды.

Дәлелдеуі. Алдыңғы теорема дәлелдеуіндей $J_{0,\delta_1}; J_{\delta_1,\delta_2}; J_{\delta_2,+\infty}$ интегралдарын бағалауға келеді. $J_{\delta_2,+\infty}$ интегралы жеткілікті үлкен δ_2 – мәндерінде аз, өйткені $f(x)$ абсолютті интегралданатын функция. J_{0,δ_1} мәні де жеткілікті аз $\delta_1 > 0$ үшін аз, өйткені $x-$ кез келген мәнінде барлық жеткілікті аз $\zeta > 0$ үшін

$$\left|\frac{f(\zeta+x)-f(x+0)}{\zeta}\right|$$ шектеулі. Ал

$$J_{\delta_1,\delta_2} = \frac{1}{\pi}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{f(x+\zeta)-f(x+0)}{\zeta}\sin l\zeta d\zeta$$

интегралында $g(\zeta) = \dfrac{f(x+\zeta)-f(x+0)}{\zeta}$ функциясы кез келген x – мәндерінде $0 < \delta_1 \leq \xi \leq \delta_2$ кесіндісінде құрама үзіліссіз. Айталық , $\overline{a,b}$ – кесіндісінде $g(\xi)$ үзіліссіз болсын деп, $\varepsilon > 0$ - санын алайық . Оған сәйкес $g_\varepsilon(x)$ функциясын

$$\left|g(\zeta)-g_\varepsilon(\zeta)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad 0 < \delta_1 \leq \zeta \leq \delta_2$$

етіп түзейік. Сонда кез келген жеткілікті үлкен l үшін

$$\left|\int_a^b g(\zeta)\sin l\zeta d\zeta\right| \leq \int_a^b \left|g(\zeta)-g_\varepsilon(\zeta)\right| d\zeta + \left|\int_a^b g_\varepsilon(\zeta)\sin l\zeta d\zeta\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

яғни жеткілікті барлық үлкен l үшін

$$\left|J_{0,+\infty}\right| < \varepsilon .$$

Фурье интегралының комплекс түрі

Біз (61) нақты түрдегі Фурье интегралдық формуласының оң жағындағы